

FACULTY OF ENGINEERING
CHULALONGKORN UNIVERSITY
2110327 ALGORITHM DESIGN

Year II, Second Semester, Final Examination (ONLINE), May 27, 2021 13:00-16:00

ชื่อ-นามสกุล.....เลขประจำตัว.....ตอนเรียนที่.....เลขที่ใน CR58.....

หมายเหตุ

1. ข้อสอบมีทั้งหมด 6 ข้อ ในกระดาษคำถามคำตอบ 3 หน้า
2. **ไม่อนุญาตให้นำตำราและเอกสารใดๆ เข้าในห้องสอบ**
3. **ไม่อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณใดๆ**
4. ห้ามการหยิบยื่นสิ่งใดๆ ทั้งสิ้น จากผู้สอบอื่นๆ เว้นแต่เจ้าหน้าที่ควบคุมการสอบจะหยิบยื่นให้
5. ห้ามนำส่วนใดส่วนหนึ่งของข้อสอบและสมุดคำตอบออกจากห้องสอบ
6. ผู้เข้าสอบสามารถออกจากห้องสอบได้ หลังจากผ่านการสอบไปแล้ว 45 นาที
7. เมื่อหมดเวลาสอบ ผู้เข้าสอบต้องหยุดการเขียนใดๆ ทั้งสิ้น
8. **นิสิตกระทำผิดเกี่ยวกับการสอบ ตามข้อบังคับจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย มีโทษ คือ พ้นสภาพการเป็นนิสิต หรือ ได้รับสัญลักษณ์ F ในรายวิชาที่กระทำผิด และอาจพิจารณาให้ถอนรายวิชาอื่นทั้งหมดที่ลงทะเบียนไว้ในภาคการศึกษานี้**

*** ร่วมรณรงค์การไม่กระทำผิดและไม่ทุจริตการสอบที่คณะวิศวกรรมศาสตร์ ***

ข้าพเจ้ายอมรับในข้อกำหนดที่กล่าวมานี้ ข้าพเจ้าเป็นผู้ทำข้อสอบนี้ด้วยตนเองโดยมิได้รับการช่วยเหลือ หรือให้ความช่วยเหลือ ในการทำข้อสอบนี้

ลงชื่อนิสิต.....

วันที่.....

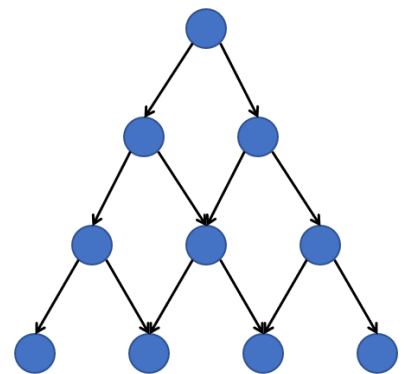
- ให้ปฏิบัติตามกฎต่าง ๆ ตามที่ได้เขียนไว้ในเอกสาร “อธิบายการสอบ Final”
- ใช้ดินสอเขียนคำตอบได้
- ให้ส่งคำตอบในระบบ MCV
 - หากใช้วิธีเขียนคำตอบลงกระดาษ สามารถส่งคำตอบได้เฉพาะช่วงเวลา 7 นาทีสุดท้ายของการสอบ
 - หากใช้วิธีพิมพ์คำตอบ หรือ เขียนลง อุปกรณ์ที่ใช้ในการสอบ สามารถส่งคำตอบได้ตลอดเวลา
 - การตรวจจะนับเฉพาะ submission สุดท้ายที่ตรงตามเงื่อนไขข้างต้นเท่านั้น

- (10 คะแนน) จงอธิบายแนวคิดและหลักการทำงานของ Topological Sort พร้อมยกตัวอย่างการใช้งานที่เหมาะสม โดยคำตอบต้องมีความยาวไม่น้อยกว่า ครึ่งหน้า และ ยาว “ไม่ควรว” เกินหนึ่งหน้า เมื่อใช้ตัวอักษรขนาดใกล้เคียงกับขนาดในข้อสอบนี้
- (10 คะแนน) ณ ประเทศแห่งหนึ่งซึ่งประกอบด้วยเมือง N เมือง แทนด้วยตัวเลขจำนวนเต็ม 1 ถึง N โดยปัญหาข้อนี้จะให้ นิสิตช่วยออกแบบอัลกอริทึมในการกระจายวัคซีนจากเมืองหลวงไปยังเมืองอื่นๆ ทุกๆเมืองโดยใช้เวลาที่ใช้ในการกระจายวัคซีนไปยังเมืองต่างๆน้อยสุดเท่าที่เป็นไปได้ โดยมีข้อกำหนดดังนี้
 - วัคซีนจะถูกส่งมาจากต่างประเทศมาที่เมืองหลวงเป็นรอบๆ
 - วัคซีนที่ถูกส่งมาแต่ละรอบมีปริมาณไม่มาก จึงทำให้วัคซีนทั้งหมดในแต่ละรอบสามารถบรรจุในรถบรรทุกคันเดียวได้เสมอ
 - ประเทศนี้มีรถบรรทุกสำหรับส่งวัคซีนอยู่ $N-1$ คัน โดยนิสิตสามารถเลือกได้ว่าจะให้แต่ละคันจอดอยู่ที่เมืองไหนบ้าง โดยสามารถมีรถบรรทุกหลายๆคันจอดอยู่เมืองเดียวกันได้
 - ระบุให้ถนนทางเดียวที่เชื่อมจากเมือง a ไปเมือง b ต้องใช้เวลาในการเดินทาง $T(a,b) > 0$ ชั่วโมง โดยถ้าหากไม่มีถนนทางเดียวเชื่อมจากเมือง a ไปเมือง b แล้ว $T(a,b)$ จะมีค่าเป็น ∞
 - เราสามารถย้ายวัคซีนบางส่วนหรือทั้งหมดจากรถบรรทุกคันหนึ่งไปยังอีกคันหนึ่งได้รวดเร็วมากจนถือว่าไม่ต้องใช้เวลาเลย
 - เมื่อวัคซีนมาถึงเมืองหลวงแล้ว จะต้องทำการกระจายไปยังทุกๆ เมืองโดยปริมาณที่แต่ละเมืองจะต้องได้รับนั้นขึ้นกับสถานะการระบาด ณ เวลานั้นๆ (แต่อย่างไรก็ดีจะต้องกระจายไปยังทุกๆเมืองแน่ๆ) โดยนิสิตไม่จำเป็นต้องนำเอาสัดส่วนการกระจายมาพิจารณาแต่อย่างใด
 - แผนการกระจายวัคซีนจะต้องทำให้วัคซีนมาถึงยังเมืองต่างๆแต่ละเมืองเร็วที่สุดเท่าที่เป็นไปได้ (ต้อง Optimal)
 - เมื่อรถบรรทุกขนวัคซีนจากเมืองหนึ่งไปยังอีกเมืองหนึ่ง (หรือหลายๆเมือง) แล้วสุดท้ายจะต้องเดินทางกลับไปยังเมืองที่รถบรรทุกนี้ประจำอยู่ เพื่อรอการกระจายในรอบถัดไป
 - หากมีหลายแผนที่จะทำการกระจายที่ใช้เวลาน้อยที่สุด ให้เลือกแผนที่ทำให้ผลรวมของเวลาที่รถบรรทุกแต่ละคันจะต้องวิ่งน้อยที่สุดเท่าที่ได้ (ไม่จำเป็นต้อง Optimal ก็ได้แต่ไม่ควรวเกินจำเป็น)

จากข้อกำหนดเหล่านี้ให้นิสิต อธิบายแนวคิดในการแก้ปัญหานี้ โดยคำอธิบายจะต้องสามารถตอบคำถามดังต่อไปนี้ได้ดีและครบถ้วนจึงจะได้คะแนนเต็ม

- จะให้รถบรรทุกแต่ละคันจอดที่เมืองใด
- เมื่อวัคซีนมาถึงเมืองหลวงแล้วจะบรรจุวัคซีนให้คันไหนบ้าง
- จะให้รถบรรทุกแต่ละคันวิ่งอย่างไร
- จะขนย้ายวัคซีน (บางส่วนหรือทั้งหมด) จากคันไหนไปคันไหนตอนไหนบ้าง
- จะขนวัคซีน (บางส่วนหรือทั้งหมด) จากรถบรรทุกให้แก่เจ้าหน้าที่ในแต่ละเมืองตอนไหน

- (10 คะแนน) กำหนดให้กราฟสามเหลี่ยมความสูง n ชั้นเป็นกราฟมีน้ำหนักแบบมีทิศทาง (weighted directed graph) ที่มีปม $n(n+1)/2$ ปม โดยปมเหล่านี้จะถูกแบ่งเป็นชั้น ๆ ตั้งแต่ชั้นหมายเลข 1 ถึงชั้นหมายเลข n และ ที่ชั้นหมายเลข i ใด ๆ จะมีปมอยู่ i ปมพอดี ในชั้นแต่ละชั้นปมจะเรียงจากซ้ายไปขวา ดังนั้นเราสามารถระบุปมแต่ละปมได้ด้วยหมายเลขชั้นและลำดับ (ให้ปมซ้ายสุดในชั้น i เป็นปมลำดับที่ 1 และ ปมขวาสุดเป็นปมลำดับที่ i) ปมแต่ละปมในชั้นที่ 1 ถึงชั้นที่ $n-1$ จะมีเส้นเชื่อมแบบมีทิศทางปมละ 2 เส้นพอดี โดยปมในชั้นที่ a ลำดับที่ b จะมีเส้นเชื่อมไปยังปมชั้นที่ $a+1$ ลำดับที่ b และปมชั้นที่ $a+1$ ลำดับที่ $b+1$ และกำหนดให้ $e[a][b][c]$ เป็นน้ำหนักของเส้นเชื่อมจากปมในชั้นที่ a ลำดับที่ b ไปยังปมในชั้นที่ $a+1$ ลำดับที่ c รูปด้านขวานี้แสดงกราฟสามเหลี่ยมความสูง 4



เราต้องการเลือกเส้นเชื่อมบางเส้นจากกราฟนี้ที่ทำให้มีเส้นทางจากปมชั้นที่ 1 ลำดับที่ 1 ไปยังทุก ๆ ปมในกราฟนี้ โดยให้ผลรวมของน้ำหนักของเส้นเชื่อมที่เลือกมีค่าน้อยที่สุด จงออกแบบอัลกอริทึมสำหรับการแก้ปัญหา

4. (10 คะแนน) ปัญหา “พบกันกลางทาง” เป็นดังนี้ มีเมืองอยู่ n เมือง (แต่ละเมืองกำกับด้วยหมายเลข 1 ถึง n) เมืองแต่ละเมืองมีชุมทางรถทัวร์อยู่ ซึ่งเราสามารถเดินทางด้วยรถทัวร์นี้ไปยังบางเมืองได้ ให้ $e[a]$ เป็นรายการของเมืองปลายทางที่เราสามารถเดินทางได้จากเมือง a ได้ กำหนดให้รถทัวร์นั้นออกวิ่งตอนกลางคืน และไปถึงปลายทางตอนเช้า ดังนั้น คนแต่ละคนสามารถเดินทางด้วยรถทัวร์ได้ “ไม่เกิน” 1 ครั้งต่อ 1 วัน (กล่าวคือ ในวันนั้นสามารถขึ้นรถทัวร์จากเมืองที่ตัวเองอยู่ ไปยังเมืองปลายทางที่ได้จากชุมทางรถทัวร์ของเมืองนั้นเท่านั้น แต่การเดินทางนั้นจะเปลี่ยนวันเป็นวันรุ่งขึ้นแน่นอนว่าคนนั้นจะเลือกอยู่กับที่โดยไม่เดินทางก็ได้) เรามีคนอยู่ 3 คน อยู่ ณ เมือง t_1, t_2 และ t_3 (ซึ่งเป็นไปได้ที่จะมีมากกว่า 1 คนอยู่ในเมืองเดียวกัน) คนทั้งสามคนนี้เป็นเพื่อนกัน และต้องการมาเจอกัน ณ เมืองใดสักเมืองหนึ่ง จงออกแบบอัลกอริทึมเพื่อตอบคำถามต่อไปนี้
- 4.1. ต้องใช้เวลาอย่างน้อยกี่วันที่ทั้งสามคนจะสามารถเดินทางมาเจอกันได้? (ตัวอย่างเช่นสมมติให้ $t_1=t_2=t_3$ คำตอบของข้อนี้จะเป็น 0 แต่ถ้า $t_1=t_2$ ในขณะที่เมือง t_3 มีรถทัวร์ไปเมือง t_2 คำตอบจะเป็น 1)
- 4.2. เส้นทางในการเดินทาง (หรือการอยู่เฉย ๆ) ของแต่ละคนเพื่อที่จะได้มาเจอกันในระยะเวลาในข้อ 4.1 คือเส้นทางใด? ให้ตอบเป็นลำดับของเมืองที่แต่ละคนจะต้องเดินทางตามลำดับ (หากอยู่นิ่ง ๆ ไม่เดินทางไปไหนให้ระบุเมืองเดิมซ้ำ เช่น $[1,4,2,2,3]$ แปลว่า เดินทางจาก 1 ไป 4 แล้วไป 2 แล้วหยุดที่ 2 หนึ่งวัน แล้วค่อยไป 3)
5. (10 คะแนน) ปัญหาที่กำหนดคนให้ทำงานเป็นดังนี้ เรามีคนอยู่ n คน (กำกับด้วยหมายเลข 0 ถึง $n-1$) และมีงานอยู่ n ชิ้น (กำกับด้วยหมายเลข 0 ถึง $n-1$ เช่นกัน) กำหนดให้ $\text{cost}[a][b]$ คือค่าจ้างคน a มาทำงาน b เราต้องการให้งานทุกชิ้นทำเสร็จ นอกจากนี้ กำหนดให้คนแต่ละคนจะต้องทำงาน 1 ชิ้นพอดี (กล่าวคือ ทุกคนมีงานทำ และไม่มีใครต้องทำงานมากกว่า 1 ชิ้น) ดังนั้นเราจึงต้องเลือกว่างานชิ้นใดจะจ้างให้ใครทำ เราต้องการให้ผลรวมของค่าจ้างน้อยที่สุด จงออกแบบอัลกอริทึมแบบ State Space Search เพื่อแก้ปัญหานี้ และให้ตอบคำตอบต่อไปนี้
- 5.1. กำหนดให้ $\text{work}[i]$ ระบุว่างานชิ้นที่ i นั้นทำโดยใคร (เช่น $\text{work}[5] = 3$ หมายความว่า งานหมายเลข 5 ทำโดยคนหมายเลข 3) จงเขียนฟังก์ชัน $\text{check}(n, \text{cost}, \text{work}, k)$ ซึ่งจะคืนค่า True ก็ต่อเมื่อการระบุงานที่ทำถูกต้องตามกฎ และ ผลรวมของค่าจ้างทั้งหมดไม่เกิน k (สามารถเขียนด้วยภาษา c++ หรือ python หรือ pseudo-code ก็ได้)
- 5.2. หากอัลกอริทึมที่ออกแบบมา เป็นแบบ Branch & Bound จงระบุวิธีการคำนวณ Bound และ วิธีการใช้งาน Bound ดังกล่าวให้ชัดเจน
6. (10 คะแนน) ข้อนี้เป็นการออกแบบวิธีการลดรูปปัญหาการตัดสินใจ (decision problem)
- กำหนดให้ปัญหา P เป็นปัญหาการตัดสินใจ (decision problem) ที่มี input เป็น อาร์เรย์ a , อาร์เรย์ b และค่า c โดย P คือการถามว่า มีจำนวนของตัวเลขที่เป็นจำนวนเต็มบวกใน a มากกว่า จำนวนของตัวเลขที่เป็นจำนวนเต็มบวกใน b ไม่เกิน c ตัวหรือไม่
 - กำหนดให้ปัญหา Q เป็นปัญหาการตัดสินใจ (decision problem) ที่มี input เป็น อาร์เรย์ a , อาร์เรย์ b และค่า c และให้ $\text{sum}(x)$ คือ ผลรวมของจำนวนใด ๆ ใน อาร์เรย์ x ที่มีค่าตั้งแต่ 1 ถึง 2 ปัญหา Q คือการถามว่า $\text{sum}(a) - \text{sum}(b)$ นั้นไม่เกิน c หรือไม่
 - สำหรับปัญหา P และ Q ข้างต้นนั้น กำหนดให้ข้อมูลใน a และ b เป็นอาร์เรย์ของจำนวนเต็มเท่านั้น และให้ c เป็นจำนวนเต็มเช่นกัน
 - จงแสดงว่าเราสามารถลดรูปปัญหา P ไปเป็น Q ได้ และสามารถลดรูปปัญหา Q ไปเป็น P ได้เช่นกัน ในการลดรูปนั้น จำเป็นที่จะต้องใช้คำตอบจากปัญหาที่ลดรูปไปหามาใช้เป็นส่วนหนึ่งของการคำนวณคำตอบของปัญหาตั้งต้นด้วย