FACULTY OF ENGINEERING

CHULALONGKORN UNIVERSITY

2110327 Algorithm Design

YEAR III, First Semester, Final-term Examination, November 30, 2015, Time 8:30 – 11:30

ชื่อ-นามสกุล_____เลขประจำตัว _____CR58_____

หมายเหตุ

1. ข้อสอบมีทั้งหมด 9 ข้อในกระดาษคำถามคำตอบ รวม จำนวน 8 หน้า คะแนนเต็ม 92 คะแนน
2. ไม่อนุญาตให้นำตำราและเครื่องคำนวณต่างๆ ใดๆ เข้าห้องสอบ
3. ควรเขียนตอบด้วยลายมือที่อ่านง่ายและชัดเจน
4. ห้ามการหยิบยืมสิ่งใดๆ ทั้งสิ้น จากผู้สอบอื่นๆ เว้นแต่ผู้คุมสอบจะหยิบยืมให้
5. ห้ามนำส่วนใดส่วนหนึ่งของข้อสอบออกจากห้องสอบ ข้อสอบเป็นทรัพย์สินของราชการซึ่งผู้ลักพาอาจมีโทษทางคดีอาญา
6. ผู้เข้าสอบสามารถออกจากห้องสองได้ หลังจากผ่านการสอบไปแล้ว 45 นาที
7. เมื่อหมดเวลาสอบ ผู้เข้าสอบต้องหยุดการเขียนใดๆ ทั้งสิ้น
8. **นิสิตกระทำผิดเกี่ยวกับการสอบ ตามข้อบังคับจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย มีโทษ คือ ได้รับ สัญลักษณ์ F ในรายวิชาที่ทุจริต และพักการศึกษาอย่างน้อย 1 ภาคการศึกษา**

ห้ามนิสิตพกโทรศัพท์หรืออุปกรณ์สื่อสารไว้กับตัวระหว่างสอบ หากตรวจพบจะถือว่านิสิตกระทำผิดเกี่ยวกับการสอบ ให้ได้รับ F และอาจพิจารณาสั่งพักการศึกษา **

ข้าพเจ้ายอมรับในข้อกำหนดที่กล่าวมานี้ ข้าพเจ้าเป็นผู้ทำข้อสอบนี้ด้วยตนเองโดยมิได้รับการช่วยเหลือ หรือให้ความช่วยเหลือในการทำข้อสอบนี้

ลงชื่อนิสิต .....

วันที่.....

---

1. (18 คะแนน) จงระบุว่า ข้อย่อยต่อไปนี้ข้อใดจริง ข้อใดเท็จ (ไม่ต้องอธิบายที่มาของคำตอบ เขียนตอบแค่ T หรือ F คำตอบที่ถูกต้องจะได้ 1 คะแนน คำตอบที่ผิดจะติดลบ 0.5 คะแนน คะแนนติดลบในข้อนี้จะไม่ส่งผลกระทบไปยังข้ออื่น)
   1) ..... อัลกอริทึมของ Floyd-Warshall อาศัย recurrence $d_{ij}(k) = \min(d_{ij}(k-1),\ d_{ik}(k-1)+d_{kj}(k-1))$
   2) ..... เราหา maximum spanning tree ของกราฟ G ได้ง่าย ๆ ด้วยการสร้างกราฟ H ที่เหมือน G แต่เส้นเชื่อมของ H มีน้ำหนักเป็นค่าติดลบของน้ำหนักเส้นเชื่อมใน G จะได้ว่า minimum spanning tree ของ H (ที่หาด้วย อัลกอริทึม Prim) ก็เป็น maximum spanning tree ของ G เช่นกัน
   3) ..... ให้ G เป็น directed acyclic graph เราหา longest path ใน G ได้ง่าย ๆ ด้วยการสร้างกราฟ H ที่เหมือน G แต่เส้นเชื่อมของ H มีน้ำหนักเป็นค่าติดลบของน้ำหนักเส้นเชื่อมใน G จะได้ว่า shortest path ของ H (ที่หาด้วยอัลกอริทึมของ Dijkstra) ก็เป็น longest path ของ G เช่นกัน
   4) ..... ให้ G เป็น dense graph ซึ่งคือกราฟที่มีจำนวนเส้นเชื่อม $e = \Theta(v^2)$ การหา minimum spanning tree ด้วยอัลกอริทึมของ Prim กับ Kruskal จะมี time complexity เท่ากัน ไม่ว่าจะเลือกใช้โครงสร้างข้อมูลแบบใดก็ตาม
   5) ..... เป็นได้ไหม ที่ directed graph G ที่มี v ปม เป็น weakly connected graph แต่มี $v - 1$ strongly connected components
   6) ..... โดยปกติเรานิยามให้ความยาวของ path หนึ่งคือ**ผลรวม**ของ edge ทุกเส้นใน path นั้น ถ้าขอเปลี่ยนนิยามให้ความยาวของ path หนึ่งเป็น **ผลคูณ**ของ edge ทุกเส้นใน path นั้น อยากทราบว่า ถ้าไม่มีเส้นเชื่อมใดที่ความยาวเป็นลบ จะใช้อัลกอริทึม Dijkstra หา shortest path (ด้วยนิยามความยาวแบบผลคูณ) ได้หรือไม่
   7) ..... โดยปกติเรานิยามให้ความยาวของ path หนึ่งคือ**ผลรวม**ของ edge ทุกเส้นใน path นั้น ถ้าขอเปลี่ยนนิยามให้ความยาวของ path หนึ่งเป็น **ผลคูณ**ของ edge ทุกเส้นใน path นั้น อยากทราบว่า จะใช้อัลกอริทึม Bellman-Ford หา shortest path (ด้วยนิยามความยาวแบบผลคูณ) ได้หรือไม่

8) ..... กราฟที่มี topological sort แค่แบบเดียว เป็นกราฟที่หา shortest path ระหว่างปมใด ๆ ได้ใน O(v)

9) ..... การเพิ่มความยาวให้กับเส้นเชื่อมทุกเส้นในกราฟด้วยค่าคงตัว K ไม่ได้ทำให้ shortest path ในกราฟเปลี่ยน

10) ..... ให้ G เป็น directed graph ขนาด 10,000 ปม ที่มี 1 strongly connected component และทุก vertex มี in-degree = 1 และ out-degree = 1 จะได้ว่าหน่วยความจำที่ใช้เพื่อทำ depth-first search มีปริมาณน้อยกว่าเมื่อทำ breadth-first search กับกราฟ G

11) ..... การทำ depth-first search กับกราฟ G ที่มี v ปม e เส้น ที่แทนด้วย adjacency matrix ใช้เวลา O(v^2)

12) ..... หลังจากอัลกอริทึมของ Ford-Fulkerson หยุดทำงานแล้ว เราสามารถหาปริมาณ max-flow ได้ง่าย ๆ ด้วยการรวม flow ของเส้นเชื่อมทุกเส้นที่พุ่งออกจากปม source ของ network

13) ..... หลังจากอัลกอริทึมของ Ford-Fulkerson หยุดทำงานแล้ว เราสามารถหาปริมาณ min-cut ได้ง่าย ๆ ด้วยการรวม flow ของเส้นเชื่อมทุกเส้นที่พุ่งเข้าหาปม sink ของ network

14) ..... การทดสอบว่ากราฟ G เป็น directed acyclic graph หรือไม่ ทำได้ในเวลา O(v+e) ด้วย depth-first search ดังนั้น ปัญหาการทดสอบว่ากราฟ G เป็น directed acyclic graph หรือไม่ จึงไม่จัดอยู่ในกลุ่ม *NP*

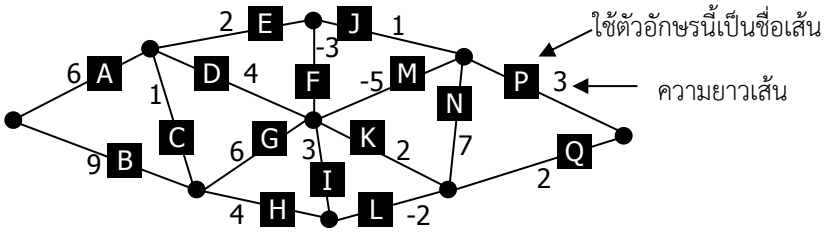
15) ..... เราเรียก decision-problem q ว่า เป็น *NP*-complete ก็ต่อเมื่อทุก ๆ ปัญหาใน *NP* สามารถลดรูป (reduce) ไปเป็นปัญหา q ได้

16) ..... ทุกปัญหาใน *P* มีอัลกอริทึมหาคำตอบได้ใน polynomial time ดังนั้น ปัญหาใน *P* จึงมีความง่ายเท่ากันหมด

17) ..... ปัญหาใน *NP* ที่ไม่อยู่ใน *P* ก็ต้องเป็น NP-complete

18) ..... หากมีวิธี reduce (ในเวลา polynomial) ปัญหา S ไปเป็นปัญหา q สรุปได้ว่า ปัญหา S ไม่ง่ายกว่าปัญหา q

2. (4 คะแนน) จงเขียน<u>ลำดับของชื่อเส้นเชื่อม</u>ที่ถูกเลือกให้เป็นส่วนหนึ่งของ minimum spanning tree ด้วยการใช้ Kruskal's algorithm กับกราฟข้างล่างนี้ (ไม่ต้องแสดงวิธีทำ)



.....

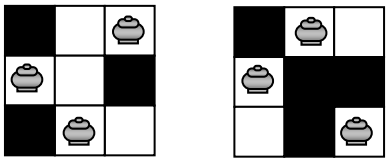
3. ตอบคำถามต่อไปนี้ โดยบรรยายการทำงานของอัลกอริทึมอย่างกระชับได้ใจความ สามารถใช้อัลกอริทึมที่นำเสนอในวิชานี้ได้เลย

1) (5 คะแนน) G เป็น connected undirected graph ในรูปของ adjacency matrix จงบรรยายอัลกอริทึมที่ใช้เวลาที่มีประสิทธิภาพดีสุด ๆ เพื่อหาว่า มี edge ใน G ไหม ที่เมื่อลบออกแล้ว G ยังคง connected

2) (5 คะแนน) จงบรรยายอัลกอริทึมที่หา spanning tree สักหนึ่งต้น (ไม่จำเป็นต้อง minimal) ของ undirected graph G ในเวลาเชิง asymptotic ที่เร็วสุด ๆ

3) (5 คะแนน) จงบรรยายขั้นตอนการหา shortest path ระหว่างคู่ปมที่กำหนดให้ของกราฟ G ที่เส้นเชื่อมทุกเส้นยาวเท่ากันหมดในเวลาเชิง asymptotic ที่เร็วสุด ๆ

4. (5 คะแนน) จงแสดงวิธีการเปลี่ยนปัญหาข้างล่างนี้ให้เป็นปัญหา max flows ยกตัวอย่างการแปลงประกอบด้วย (โดยใช้ตัวอย่างของรูปที่แสดง) จงหาวิธีการวาง "เรือ" ที่ไม่ "กินกัน" ให้ได้จำนวนมากสุด ในช่องต่าง ๆ ของตารางขนาด r × c (แถวแนวนอน r แถว, แถวแนวตั้ง c แถว) โดยตารางนี้มีบางช่องที่กำหนดให้ห้ามวางเรือ (หมายเหตุ เรือในหมากรุก มีการเดินและกินยาวได้ในแนวตั้ง-แนวนอน ดังนั้นจึงห้ามวางเรือมากกว่าหนึ่งตัวในแถวแนวนอน หรือแถวแนวตั้งเดียวกัน) ดังสองตัวอย่างข้างล่างนี้ ช่องสีดำคือช่องที่ห้ามวางเรือ



5. (10 คะแนน) จงแสดงให้เห็นจริงว่า ปัญหาต่อไปนี้ อยู่ในกลุ่ม *NP*
   1) "กราฟ *G* มี spanning tree ที่ผลรวมของน้ำหนักของเส้นเชื่อมไม่เกิน K หรือไม่ ?"

   2) "กราฟ G มี clique ขนาดไม่น้อยกว่า K หรือไม่ ?"
      (เราจะเรียกกราฟย่อยใดของกราฟ G ว่าเป็น clique ถ้ากราฟย่อยนั้นเป็น complete subgraph คือมีเส้นเชื่อมระหว่างทุกคู่ปมในกราฟย่อยนั้น ขนาดของ clique ก็คือจำนวนปมของ clique นั้น)

6. (5 คะแนน) เราจะเรียกกราฟย่อยใดของกราฟ G ว่าเป็น clique ถ้ากราฟย่อยนั้นเป็น complete subgraph (คือมีเส้นเชื่อมระหว่างทุกคู่ปมในกราฟย่อยนั้น) จงเขียน pseudo-code ของอัลกอริทึมที่ใช้ state space search แบบ depth-first เพื่อหาว่ากราฟ G มี clique ที่ใหญ่สุดขนาดเท่าใด (ขนาดของ clique คือจำนวนปมใน clique) ให้รับกราฟ G ในรูปของ adjacency matrix (depth-first search ธรรมดา ไม่ต้องมี backtrack ไม่ต้อง branch & bound)

7. ข้อนี้เราจะพิจารณาปัญหาชื่อว่า Minimum Set Cover ซึ่งนิยามได้ดังต่อไปนี้ กำหนดให้มี set $U = \{1, 2, \dots, N\}$ และมี subset จำนวน m subsets คือ $s_1, s_2, \dots, s_m$ โดยที่ $s_i \subseteq U$ เราต้องการเลือก subset เหล่านี้มาสักชุดหนึ่ง (กำหนดให้ตัวที่เลือกคือ $s_{c1}, s_{c2}, \dots, s_{ck}$) โดยมีข้อบังคับคือ $s_{c1} \cup s_{c2} \cup \dots \cup s_{ck}$ จะต้องเท่ากับ U แน่นอนว่าเราสามารถเลือก subset ดังกล่าวได้ง่าย ๆ โดยการเลือก s_i ทุกตัว แต่โจทย์ข้อนี้มีการกำหนดเพิ่มเติมคือ การเลือก s_i นั้นจะต้องเสีย cost p_i ($p_i > 0$ เสมอ) ดังนั้น เราต้องการเลือก $s_{c1}, s_{c2}, \dots, s_{ck}$ ที่ทำให้ $p_{c1} + p_{c2} + \dots + p_{ck}$ นั้นมีค่าน้อยที่สุด จงตอบคำถามต่อไปนี้

   1) (5 คะแนน) จงพิสูจน์ว่า Minimum Set Cover เป็น NP-Complete โดยให้ Reduce ปัญหา minimum vertex cover ให้เป็นปัญหา Minimum Set Cover กำหนดให้ปัญหา minimum vertex cover เป็นดังนี้ มี Graph G = (V,E) โดยที่ปม v_i นั้นกำกับด้วยน้ำหนัก w_i เราต้องการหา $V' \subseteq V$ ที่ทำให้เส้นเชื่อมทั้งหมดของ G นั้นตกกระทบกับอย่างน้อยปมใดปมหนึ่งใน V' และทำให้น้ำหนักรวมของปมใน V' มีค่าน้อยที่สุด

   2) (5 คะแนน) จงออกแบบ State Space Search algorithm แบบ DFS ที่ไม่ใช้ backtracking หรือ branch & bound ใด ๆ สำหรับปัญหา Minimum Set Cover โดยให้ระบุ state ที่ใช้ และวิเคราะห์ประสิทธิภาพในการทำงาน พร้อมกับยกตัวอย่าง 1 ตัวอย่างของ minimum set cover ที่มีค่า m ไม่น้อยกว่า 3 และเขียน state space tree ประกอบ

3) (5 คะแนน) ถ้าต้องการใช้เทคนิค Backtracking และ/หรือ Branch & Bound จงระบุรายละเอียดของวิธีการดังกล่าว ว่าใช้อะไรเป็นข้อจำกัดในการ backtracking และ/หรือ ยกตัวอย่าง bounding function ที่ใช้ พร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบให้เห็นภาพ (อย่าลืมว่า p_i > 0 เสมอ) พร้อมทั้งระบุประสิทธิภาพเชิงเวลาของ bounding function มาด้วย

8. (10 คะแนน) ให้คุณเป็นผู้คุมเหมืองเพชรแห่งหนึ่งโดยเหมืองนี้จะมีอุโมงค์อยู่ N อุโมงค์ที่จะสามารถเข้าไปขุดเพชรออกมาได้ คุณมีคนงานอยู่ M (1<=M<=10N) คน โดยที่แต่ละคนจะสามารถเข้าไปในอุโมงค์เพียงหนึ่งอันเพื่อทำการขุดเพชรขึ้นมา และเพื่อความปลอดภัยแต่ละอุโมงค์นั้นจะมีคนงานเข้าไปขุดได้ไม่เกิน 10 คน เพื่อการวางแผนการแบ่งคนงานที่ดี คุณจึงได้ใช้เครื่อง DMPS (Diamond Mine Positioning System) ในการวัดมูลค่าของเพชรที่มีในอยู่ในแต่ละอุโมงค์ โดยเครื่อง DMPS นี้ได้คำนวณ Array 2 มิติ ของตัวเลข V[i][j] (1<=i<N, 1<=j<=10) ให้คุณโดย V[i][j] ระบุมูลค่าเพชรที่จะขุดได้ในอุโมงค์ที่ i หากใช้คนงาน j คนขุดในอุโมงค์ที่ i โดยที่ V[i][j] นั้นมีคุณสมบัติดังนี้ V[i][k] >= V[i][k-1] (2 <= k <= 10) เนื่องจากยิ่งคนงานมากก็ยิ่งได้เพชรมาก และ V[i][l]- V[i][l-1] >= V[i][l+1]-V[i][l] (2<=l<=9) เนื่องจากกฎผลิตภาพหน่วยท้ายสุดลดลง (Law of diminishing return) งานของคุณคือออกแบบอัลกอริทึมที่มีประสิทธิภาพดีที่สุดเพื่อจะหาว่าจะให้คนงานเข้าไปในอุโมงค์แต่ละอุโมงค์กี่คน เพื่อให้ผลรวมของมูลค่าเพชรที่ขุดได้สูงสุดเท่าที่จะทำได้

ตัวอย่าง มีอุโมงค์ 3 อุโมงค์ คนงาน 6 คน

อุโมงค์	1 คน	2 คน	3 คน	4 คน	5 คน	6 คน	7 คน	8 คน	9 คน	10 คน
1	100	180	250	300	330	350	350	350	350	350
2	120	230	330	400	450	500	540	570	600	620
3	200	300	320	330	330	330	330	330	330	330

วิธีที่ดีที่สุดคือให้คนงาน 1 คนขุดเพชรในอุโมงค์ที่ 1, คนงาน 3 คนขุดเพชรในอุโมงค์ที่ 2, คนงาน 2 คนขุดเพชรในอุโมงค์ที่ 3 โดยมูลค่ารวมคือ 100 + 330 + 300 = 730

9. (10 คะแนน) ในข้อนี้ให้ถือว่าคุณมีฟังก์ชั่น float shortestPath(int n, int s, int t, vector<Edge>& e) ซึ่งสามารถเรียกใช้ได้เลย ฟังก์ชันนี้คืนค่าความยาวของ shortest path จาก ปม s ไป ปม t ของกราฟมีน้ำหนักระบุทิศทางที่มี n ปมที่มีเส้นเชื่อม e[0]..e[e.size()-1] โดยนิยามของ Edge คือ

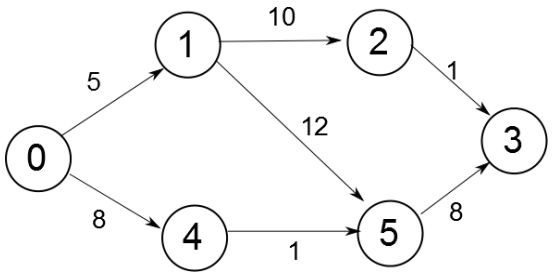
```
class Edge{
public:
      int i; //ปมต้นทาง
      int j; //ปมปลายทาง
      float w; //ระยะทาง  โดยที่ w >= 0 เสมอ
};
```

ปัญหาที่คุณต้องแก้ในข้อนี้คือคุณจะต้องเขียนฟังก์ชั่น

float shortestPathDiv2Twice(int m, int a, int b, vector<Edge>& f)

เพื่อหาระยะทางที่สั้นสุดจากปม a ไปยังปม b โดยเดินผ่านเส้นเชื่อมต่างๆที่ระบุใน f โดยที่คุณสามารถที่จะสามารถลดระยะทาง เส้นเชื่อมใดๆก็ได้ 2 เส้นลงครึ่งหนึ่ง

ตัวอย่าง



shortestPathDiv2Twice(6,0,3,f) เมื่อ f เก็บเส้นในกราฟระบุทิศทางข้างบนเอาไว้ จะต้องคืนค่า 9 ออกมา (โดยเดินจาก 0->4->5->3 และใช้การลดระยะครึ่งหนึ่งที่เส้น 0->4 และ 5->3 ทำให้ระยะรวมคือ 4+1+4 = 9)

จงเขียน code เพื่อเรียกใช้ฟังก์ชั่น shortestPath (ด้วยกราฟอื่นที่สร้างจาก input) เพื่อให้คำนวณค่า shortestPathDiv2Twice ให้ถูกต้องในช่องว่างข้างล่างนี้

```
float shortestPathDiv2Twice(int m, int a, int b, vector<Edge>& f) {
        int n,s,t;
        vector<Edge> e;
        // เขียน code ตรงนี้









        return shortestPath(n,s,t,e);
}
```